Politechnika Świętokrzyska w Kielcach

Wydział Elektrotechniki, Automatyki i Informatyki
Katedra Systemów Informatycznych

Kierunek:	**Laboratorium:**	
Elektrotechnika	**Metody estymacji parametrów i sygnałów**	
Grupa dziekańska:	**Temat ćwiczenia:**	**Wykonali:**
1EDXXA	**Aproksymacja i interpolacja układów jednowymiarowych**	• AM • ZS • BN
Data wykonania:	**Data oddania:**	**Ocena i podpis:**
10.10.2022	20.01.2023	

Spis treści

1. WSTĘP 1
2. APROKSYMACJA METODĄ NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW 2
3. WPŁYW STOPNIA WIELOMIANU APROKSYMUJĄCEGO NA DOKŁADNOŚĆ APROKSYMACJI 3
4. PORÓWNANIE WYNIKÓW APROKSYMACJI RÓŻNYMI FUNKCJAMI 7
5. INTERPOLACJA WIELOMIANOWA 11
6. WNIOSKI 13

1. Wstęp

Ćwiczenie zostało wykonane przy użyciu środowiska Octave. Napisano skrypty implementujące metodę aproksymacji liniowej, metodę aproksymacji wielomianowej, metodę aproksymacji funkcją trygonometryczną oraz metodę interpolacji wielomianem. Zbadano wpływ stopnia wielomianu na dokładność aproksymacji, stosując wskaźnik jakości IAE oraz dokonano obserwacji i analizy dokładności odtworzenia zadanego przebiegu.

2. Aproksymacja metodą najmniejszych kwadratów

W celu zbadania wpływu stopnia wielomianu aproksymującego na dokładność aproksymacji, dokonano aproksymacji funkcji wykładniczej wielomianami od 2-go do 7-go stopnia. Na układ współrzędnych naniesiono wykresy w celu porównania ich kształtu oraz obliczono wskaźniki błędu aproksymacji IAE.

$$IAE = \int \left| f(x) - \hat{f}(x) \right| dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| X_i - \hat{X}_i \right|$$

Aproksymacji dokonano liniową metodą najmniejszych kwadratów. Polega ona na wyborze funkcji aproksymującej, która zazwyczaj składa się z co najmniej jednego składnika. Problem aproksymacji skupia się na doborze parametrów, przez które składniki tej funkcji są mnożone w celu dopasowania krzywej do punktów danych. Poniżej przedstawiono dokładny opis działania tej metody. Zakładając, że $e(x, c)$ to błąd aproksymacji, $y(x)$ to funkcja obrazująca dane aproksymowane, $g(x)$ to wybrana funkcja aproksymująca, a c to parametr, którego wartość musi zostać dobrana tak, żeby zminimalizować błąd aproksymacji, problem można opisać równaniem nr. (1).

$$e(x, c) = (y(x) - g(x) \cdot c)^2 \tag{1}$$

Traktując funkcje, jak wektory liczb, równanie (1) można zapisać macierzowo (2).

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{GC})^2 \tag{2}$$

Równanie należy rozwiązać tak, aby znaleźć takie $\boldsymbol{C}$, przy którym $\boldsymbol{E}$ osiąga minimum. Kwadrat w równaniu macierzowym można rozpisać na iloczyn dwóch nawiasów, przy czym jeden z nich należy transponować (3).

$$\boldsymbol{E} = (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{GC})^T \cdot (\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{GC}) \tag{3}$$

Po przemnożeniu nawiasów:

$$\boldsymbol{E} = \boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{C} - \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Y}\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C}$$

Poszukiwane jest minimum E. Występuje ono wtedy, gdy pochodna E jest równa 0. Równanie jest więc obustronnie różniczkowane (4). Wykonano również kilka przekształceń przy użyciu zależności $\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^T = \boldsymbol{A}^T\boldsymbol{B}$.

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{\partial(\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{G}\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{C} - \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Y}\boldsymbol{C}^T + \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}} = \frac{\partial(\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{Y} - \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Y}\boldsymbol{C} - \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{C} + \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{C})}{\partial \boldsymbol{C}} \tag{4}$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{E}}{\partial \boldsymbol{C}} = -2\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}$$

$$0 = -2\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Y} + 2\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{C}\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Y} + \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}\boldsymbol{C}$$

$$\boldsymbol{C} = \frac{\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Y}}{\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G}} = (\boldsymbol{G}^T\boldsymbol{G})^{-1} \cdot \boldsymbol{G}^T\boldsymbol{Y} \tag{5}$$

Operacja opisana równaniem (5) może zostać zapisana w Octave operatorem backslash (6).

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{G} \backslash \boldsymbol{Y} \tag{6}$$

3. Wpływ stopnia wielomianu aproksymującego na dokładność aproksymacji

W celu zbadania wpływu stopnia wielomianu na dokładność aproksymacji, napisano obszerny skrypt. Jego zawartość została streszczona poniżej. Oryginalny skrypt przeprowadza aproksymację wielomianami od 2-go do 7-go rzędu, streszczenie ujmuje jedynie wielomiany 2-go i 3-go rzędu.

```
% Wektor argumentow funkcji
x = linspace(0, 7/3*pi, 100);

% Funkcja wykladnicza
fe = 1 - 2*exp(-x) + exp(-2*x);

% Punkty z wprowadzonymi zakloceniami
A = 0.4;
fer = fe + (A * rand(size(x)) - A/2);

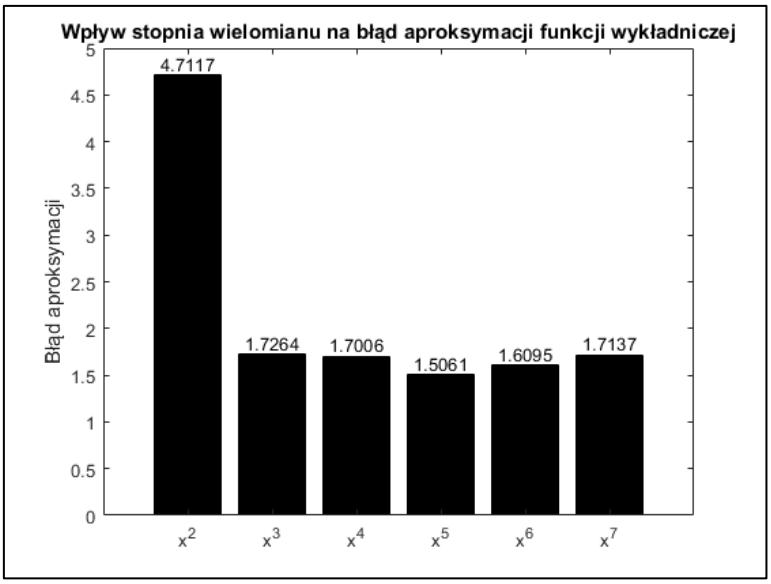
% Aproksymacja wielomianowa
G = [x.^2; x; ones(size(x))]';
fepa2 = G * (G \ fer');

G = [x.^3; x.^2; x; ones(size(x))]';
fepa3 = G * (G \ fer');

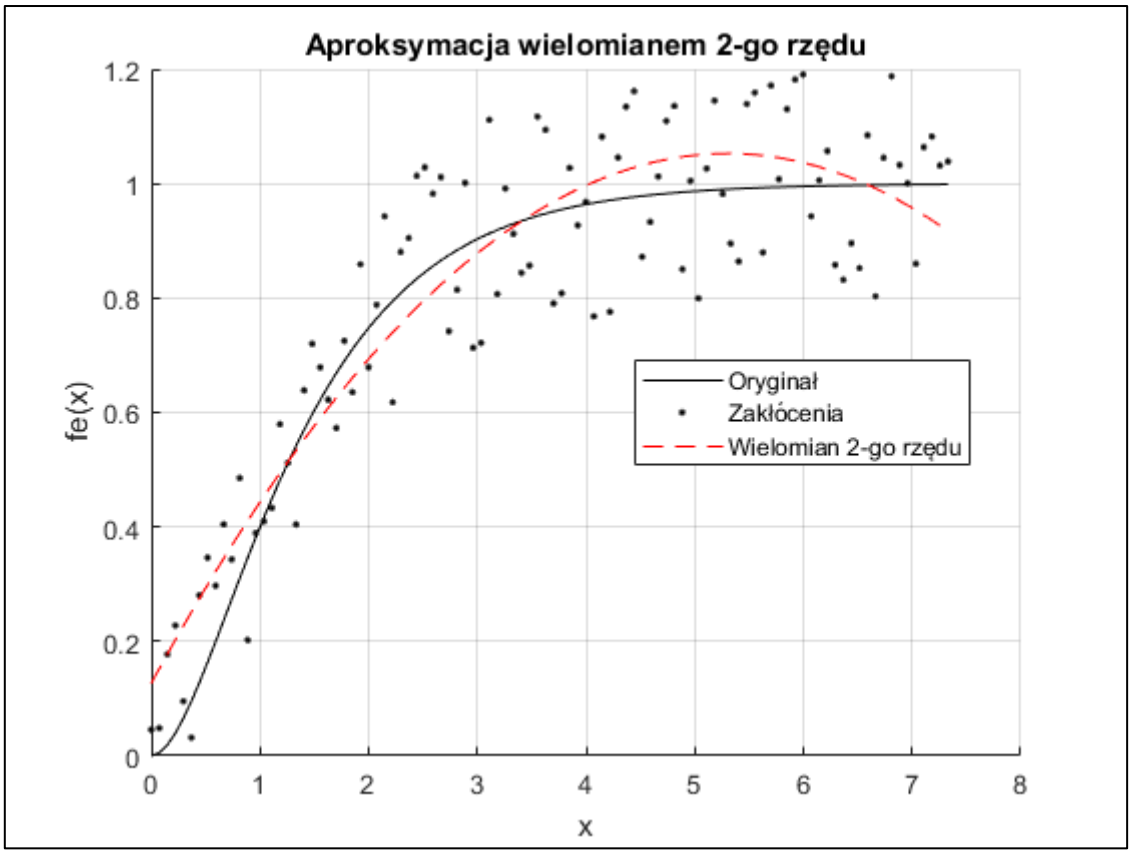
% Blad aproksymacji wielomianowej
eep2 = trapz(abs(fe - fepa2'));
eep3 = trapz(abs(fe - fepa3'));

% Wykres slupkowy przedstawiajcy blad aproksymacji
figure(1);
y = [eep2, eep3];
bar(y, 'k'); ylabel('Błąd aproksymacji');
set(gca, 'XtickLabel', {'x^2', 'x^3'})
text(1:length(y), y', num2str(y'), 'vert', 'bottom','horiz', 'center');
title('Wpływ stopnia wielomianu na błąd aproksymacji funkcji wykładnicze');
```

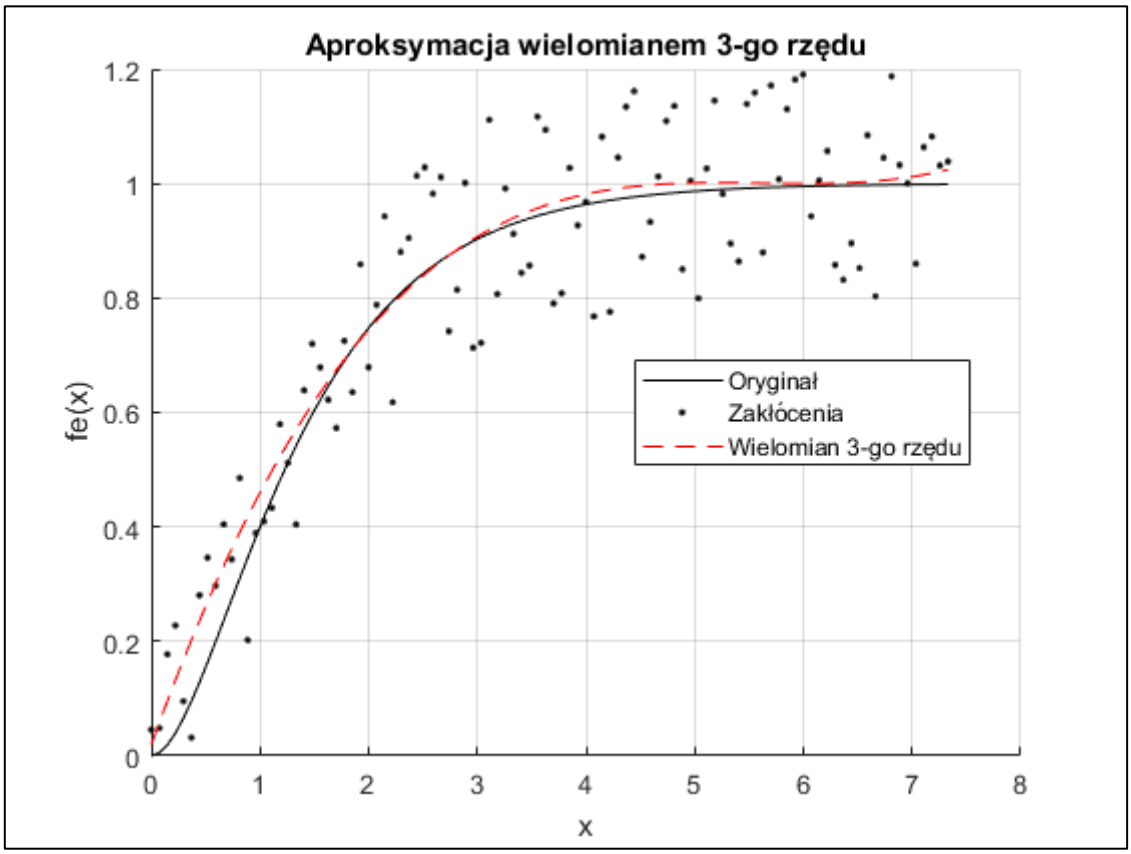
Listing 3.1 - Skrypt badający wpływ wielomianu na błąd aproksymacji



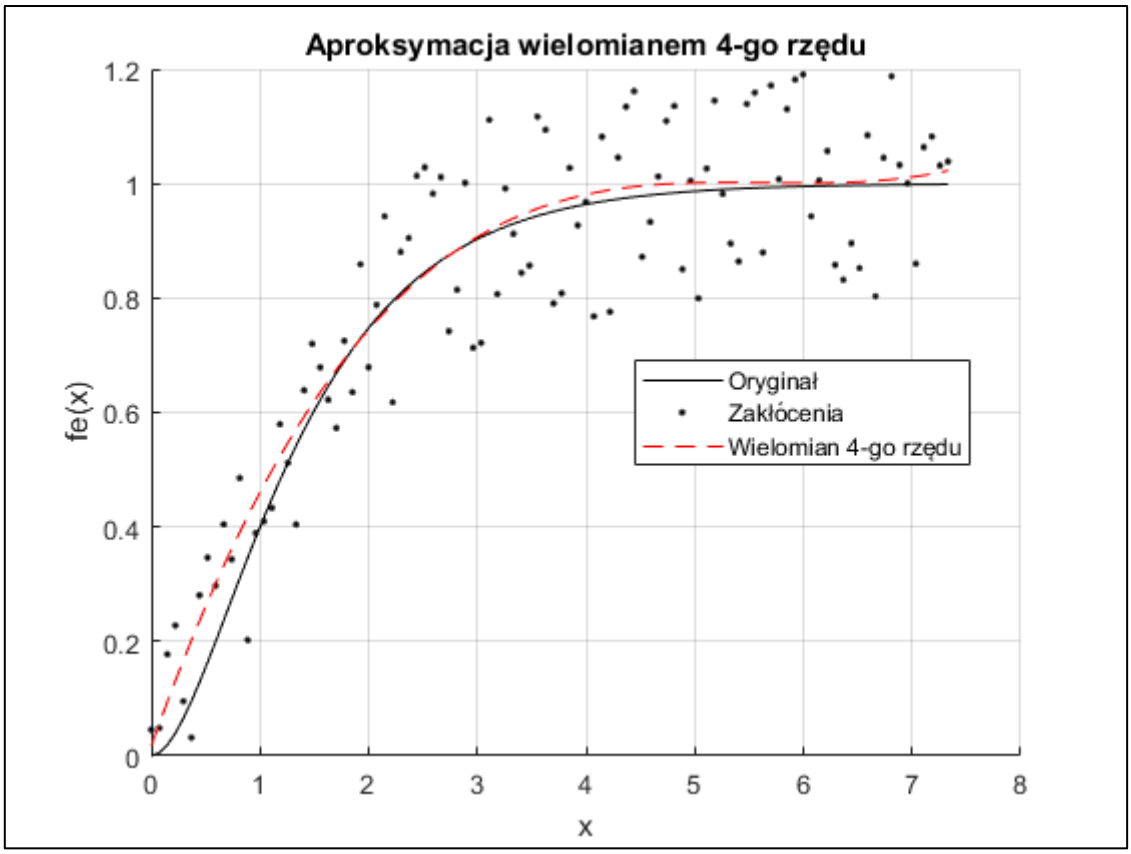
Rysunek 1 - Wykres słupkowy przedstawiający błąd aproksymacji w zależności od stopnia wielomianu



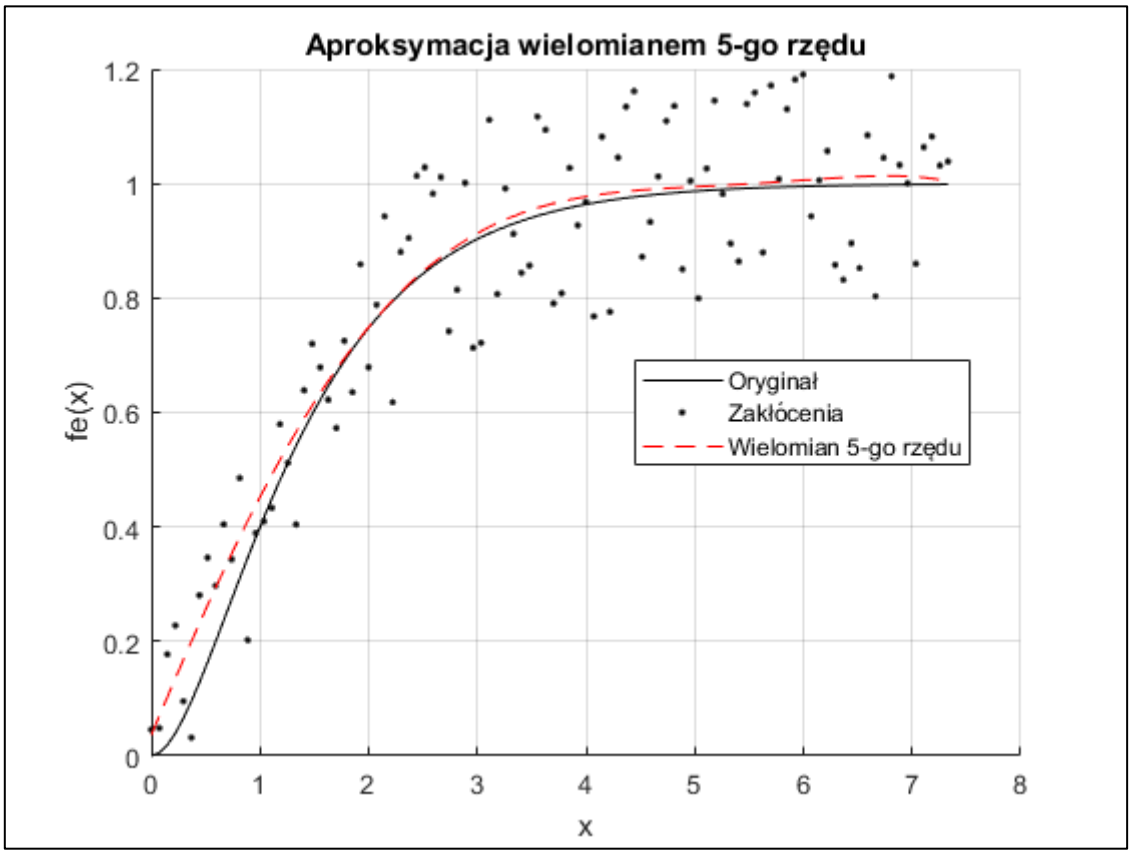
Rysunek 2 - Wykres aproksymacji funkcji wykładniczej wielomianem 2-go rzędu



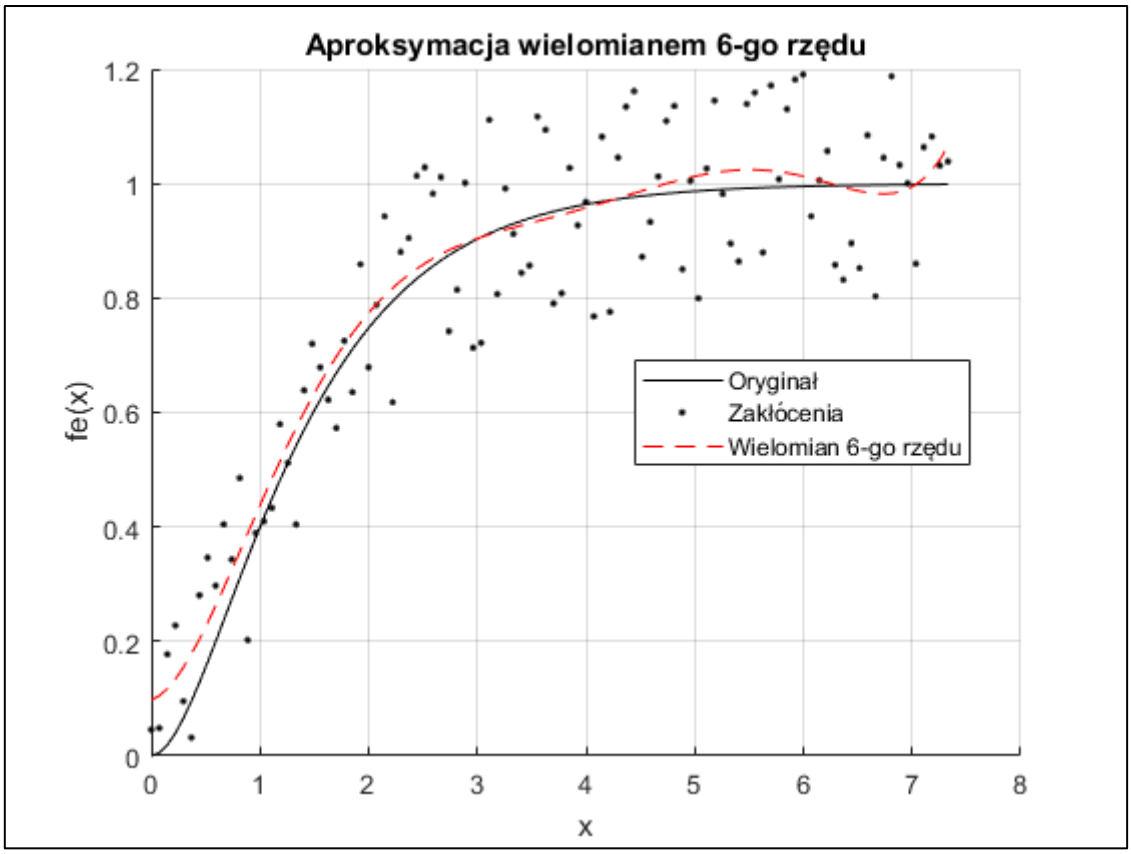
Rysunek 3 - Wykres aproksymacji funkcji wykładniczej wielomianem 3-go rzędu



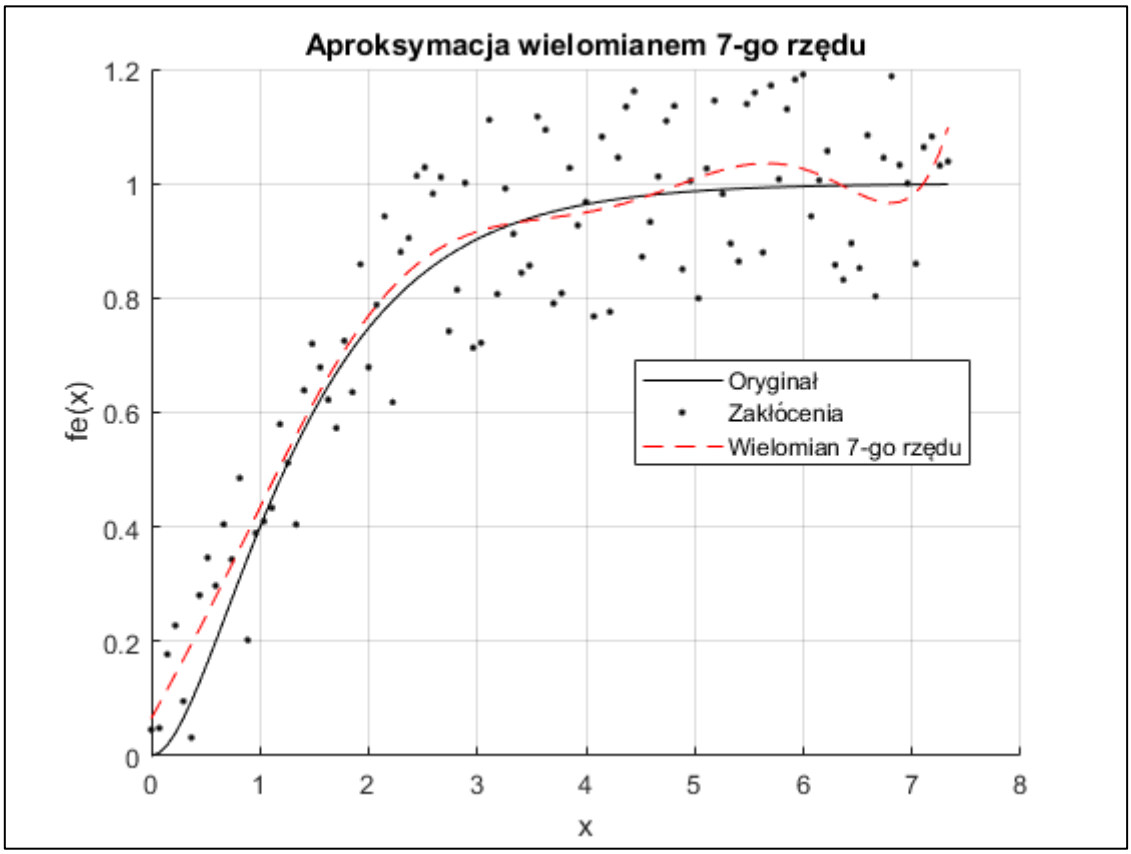
Rysunek 4 - Wykres aproksymacji funkcji wykładniczej wielomianem 4-go rzędu



Rysunek 5 - Wykres aproksymacji funkcji wykładniczej wielomianem 5-go rzędu



Rysunek 6 - Wykres aproksymacji funkcji wykładniczej wielomianem 6-go rzędu

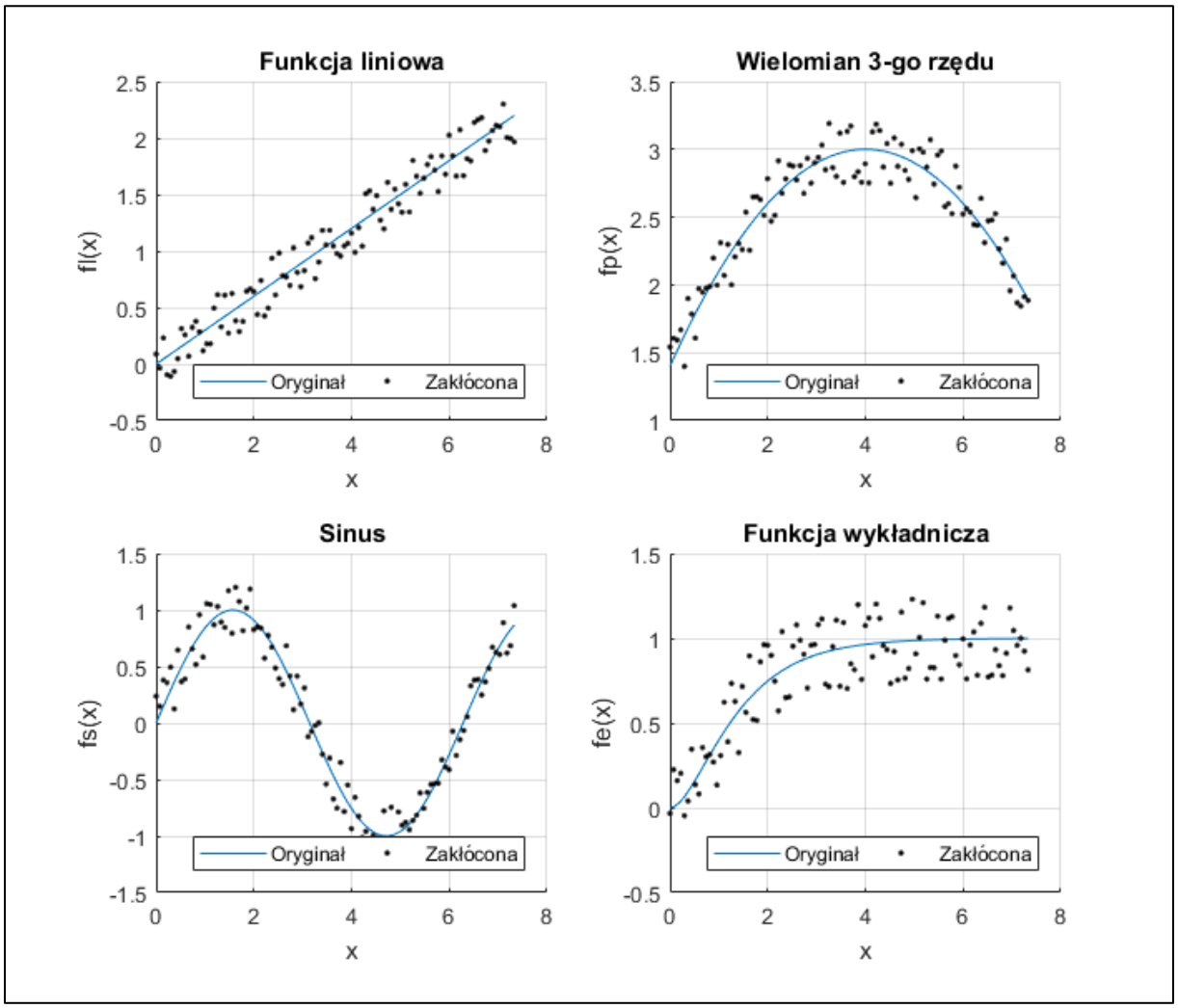


Rysunek 7 - Wykres aproksymacji funkcji wykładniczej wielomianem 7-go rzędu

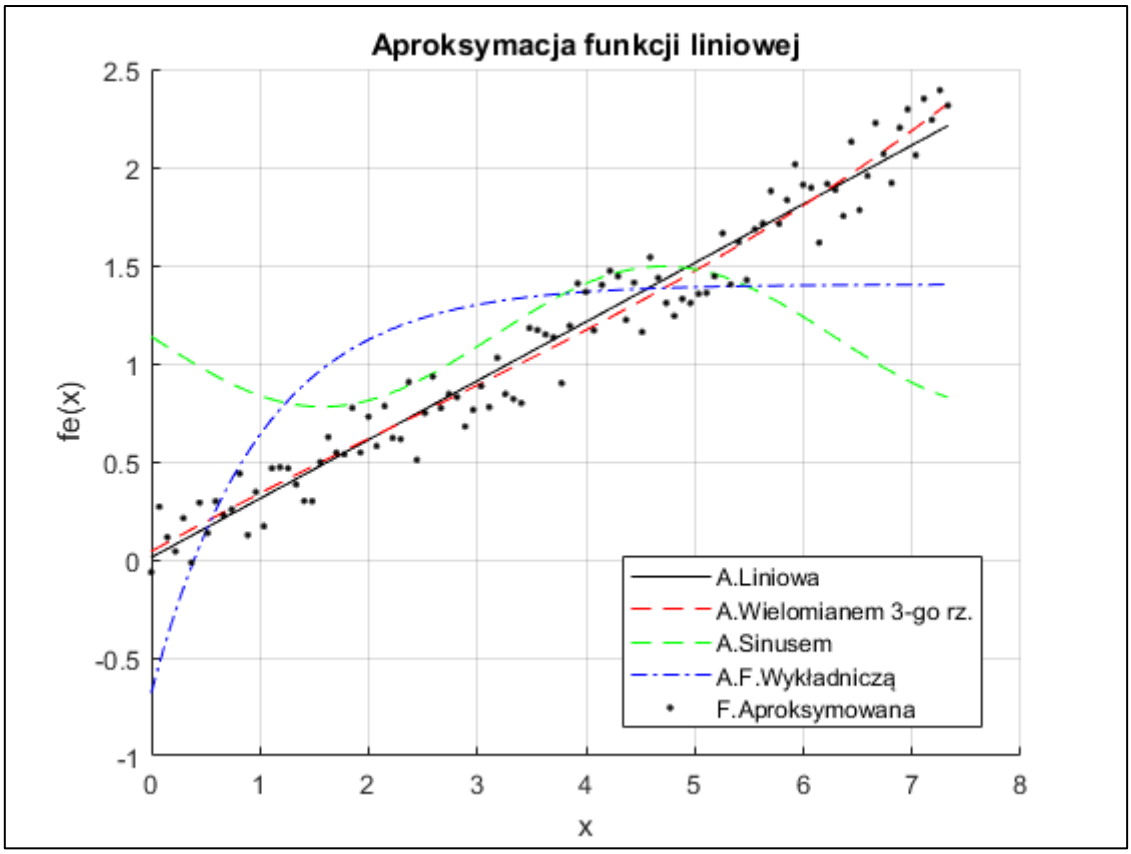
4. Porównanie wyników aproksymacji różnymi funkcjami

W celu porównania metod aproksymacji, wygenerowano 4 różne sygnały (próbki) i wprowadzono do nich zakłócenia:

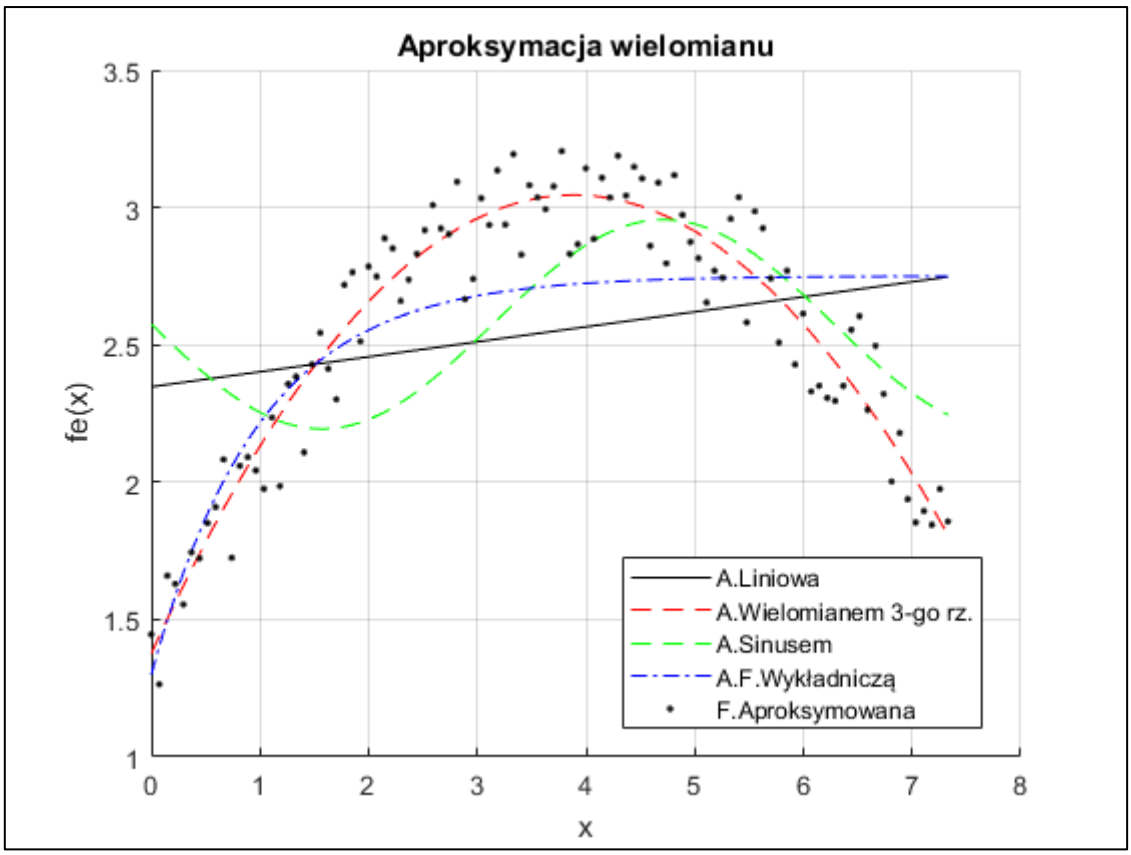
1. Funkcja liniowa $f_L(x) = 0.3 \cdot x$
2. Wielomian 2 stopnia $f_P(x) = -0.1 \cdot (x-4)^2 + 3$
3. Sinus $f_S(x) = \sin(x)$
4. Funkcja wykładnicza $f_E(x) = 1 - 2 \cdot e^{-x} + e^{-2x}$



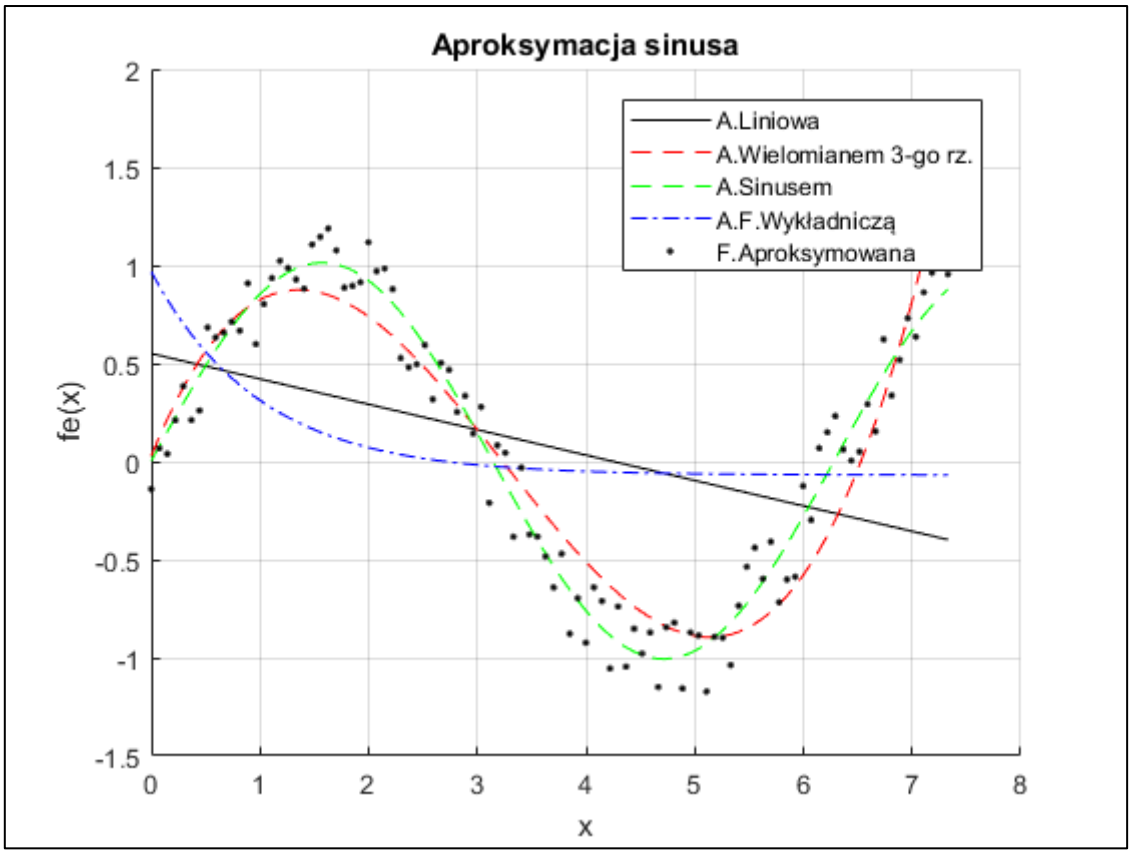
Rysunek 8 - Wykresy przedstawiające wygenerowane funkcje z zakłóceniami



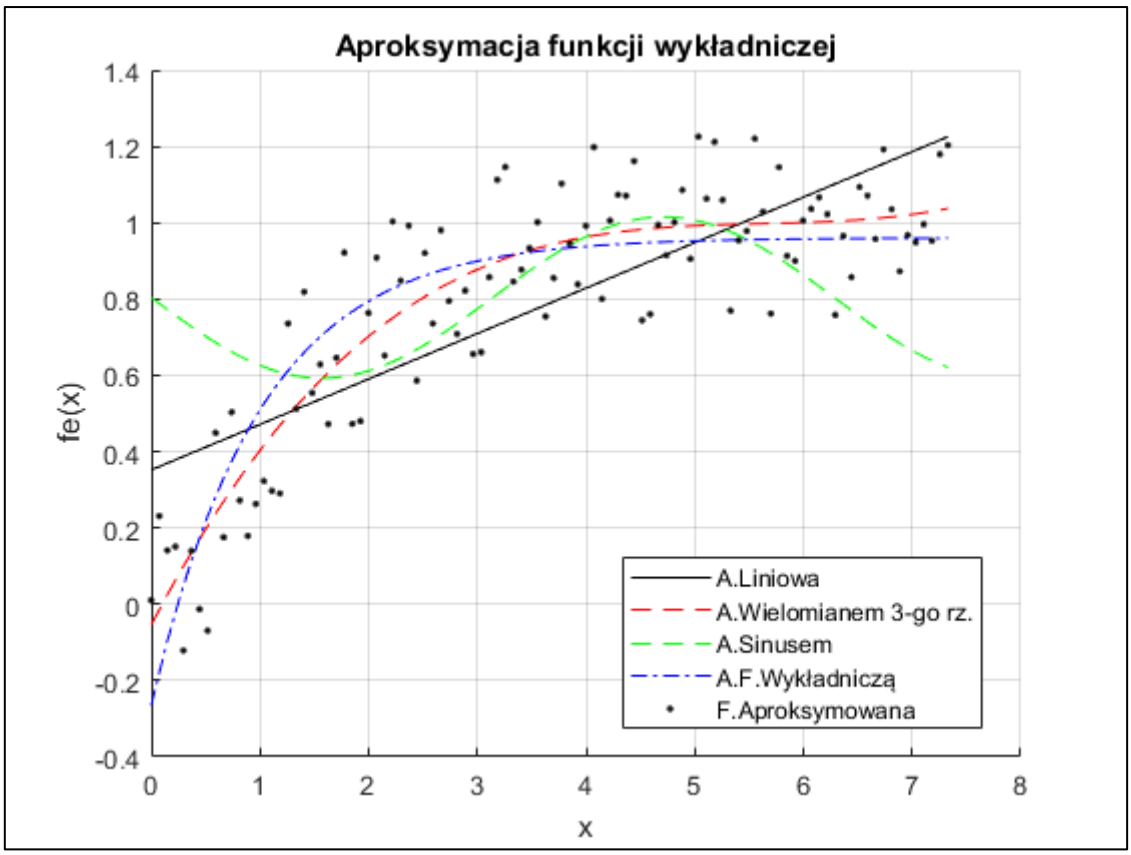
Rysunek 9 - Aproksymacja funkcji liniowej



Rysunek 10 - Aproksymacja wielomianu



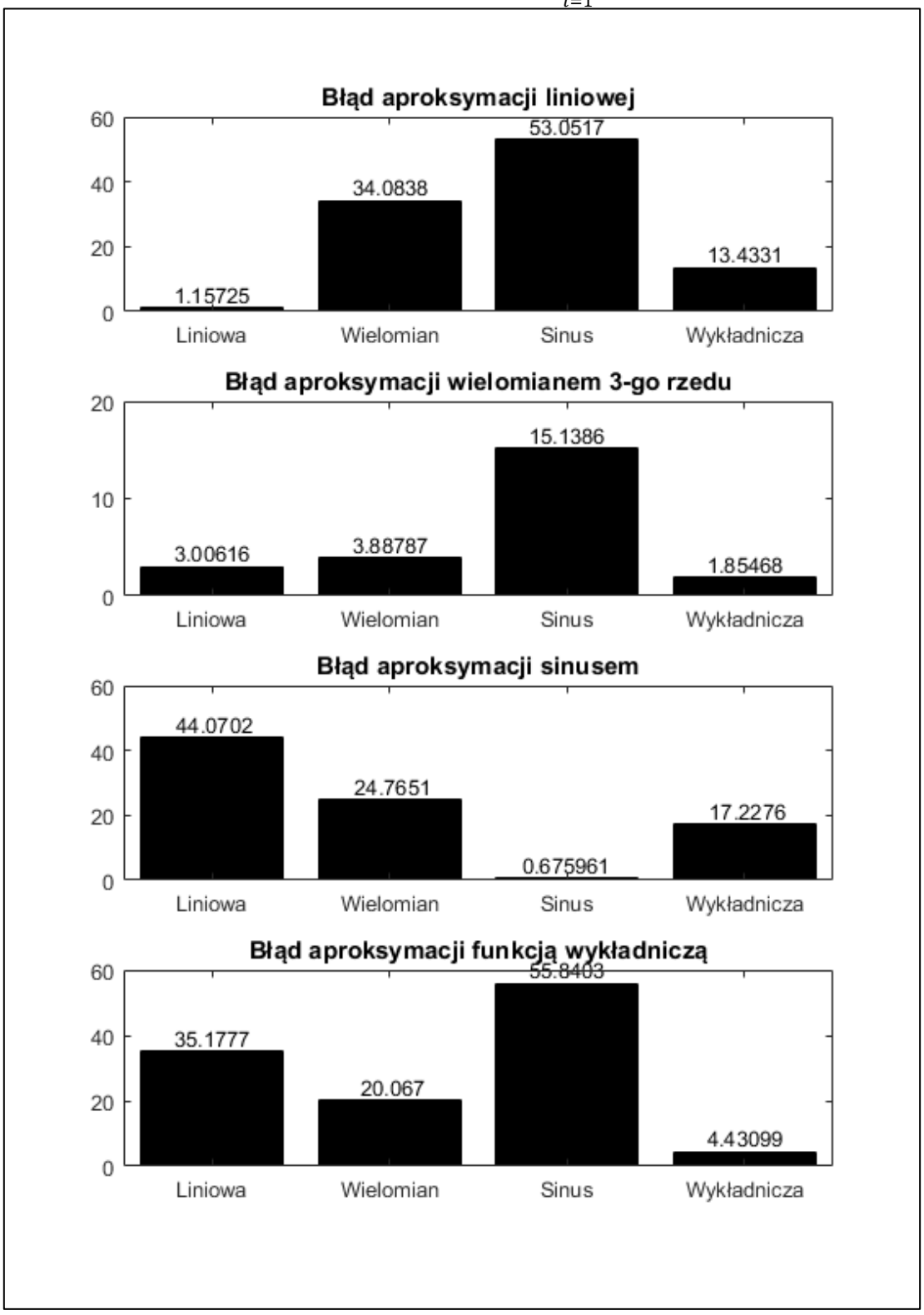
Rysunek 11 - Aproksymacja sinusa



Rysunek 12 - Aproksymacja funkcji wykładniczej

Dokonano aproksymacji każdej z próbek rozważanymi w ćwiczeniu metodami aproksymacji i obliczono wskaźnik błędu aproksymacji IAE.

$$IAE = \int \left| f(x) - \hat{f}(x) \right| dx = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \left| X_i - \hat{X}_i \right|$$



Rysunek 13 - Wykresy słupkowe przedstawiające błąd aproksymacji w zależności od kształtu funkcji aproksymowanej dla różnych rodzajów aproksymacji

5. Interpolacja wielomianowa

Interpolacja wielomianem polega na dopasowaniu wielomianu do danych tak, aby krzywa przechodziła przez punkty wybrane do interpolacji. Metodą interpolacji poruszaną na zajęciach laboratoryjnych jest metoda interpolacji wielomianem Lagrange'a.

Na ćwiczeniach laboratoryjnych wykonano ręcznie przykład, a następnie potwierdzono poprawność otrzymanych wyników przy pomocy środowiska Octave.

$$u = \{1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$y = \{0, 2, 4, 10, 12\}$$

Do interpolacji wybrano punkty u = 1, 3, 5 oraz y = 0, 4, 12.

$$\hat{y}_a = \frac{(u-3)(u-5)}{(1-3)(1-5)} \cdot 0 + \frac{(u-1)(u-5)}{(3-1)(3-5)} \cdot 4 + \frac{(u-3)(u-1)}{(5-3)(5-1)} \cdot 12 =$$

$$= \frac{u^2 - u - 5u + 5}{2 \cdot (-2)} \cdot 4 + \frac{u^2 - 3u - u + 3}{2 \cdot 4} \cdot 12 = -u^2 + 6u - 5 + 1.5u^2 - 6u + 4.5$$

$$\hat{y}_a = 0.5u^2 - 0.5$$

```
% Wektory z danymi
u = [1, 2, 3, 4, 5];
y = [0, 2, 4, 10, 12];

% Funkcja wyznaczona analitycznie
fa = @(u) 0.5 * u.^2 - 0.5;

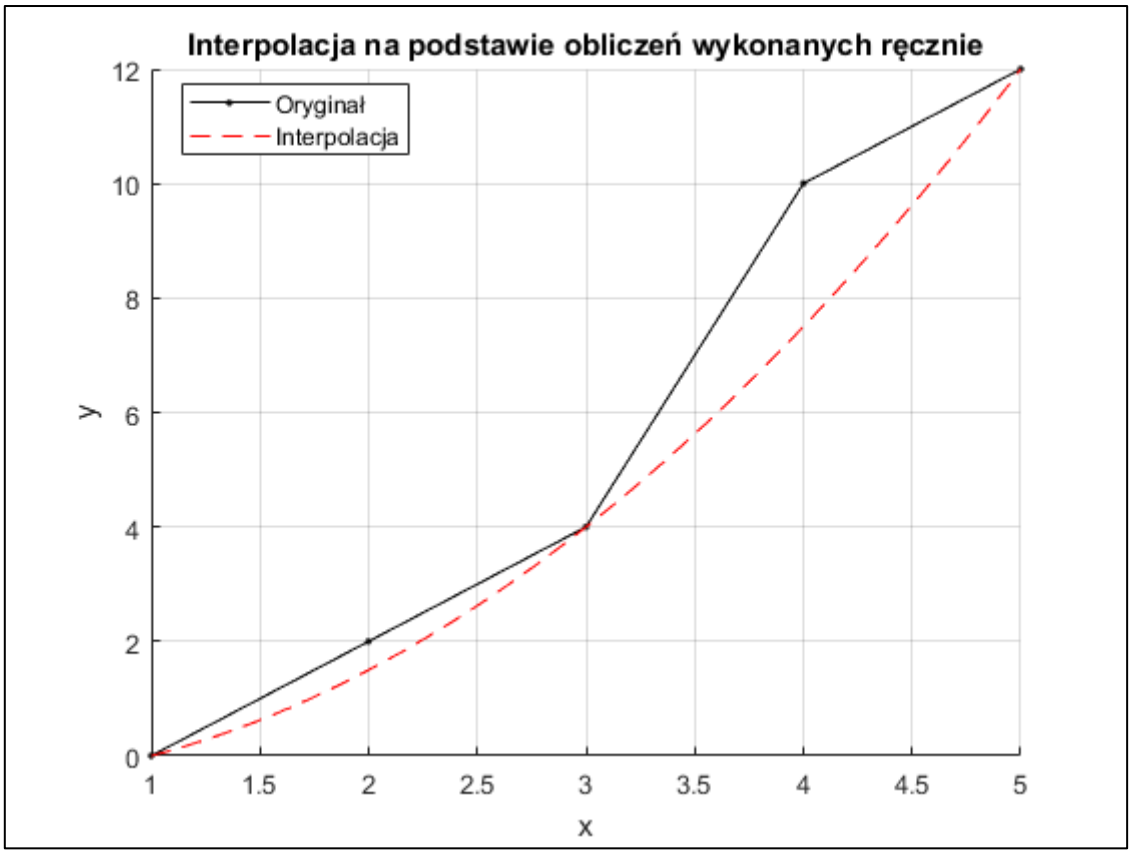
% Generowanie punktow na podstawie wyznaczonej funkcji
ua = linspace(u(1), u(end), 100);
ya = fa(ua);

% Interpolacja za pomoca funkcji polyfit
uai = linspace(u(1), u(end), 100);
P = polyfit([1, 3, 5], [0, 4, 12], 2);
yai = polyval(P, uai);

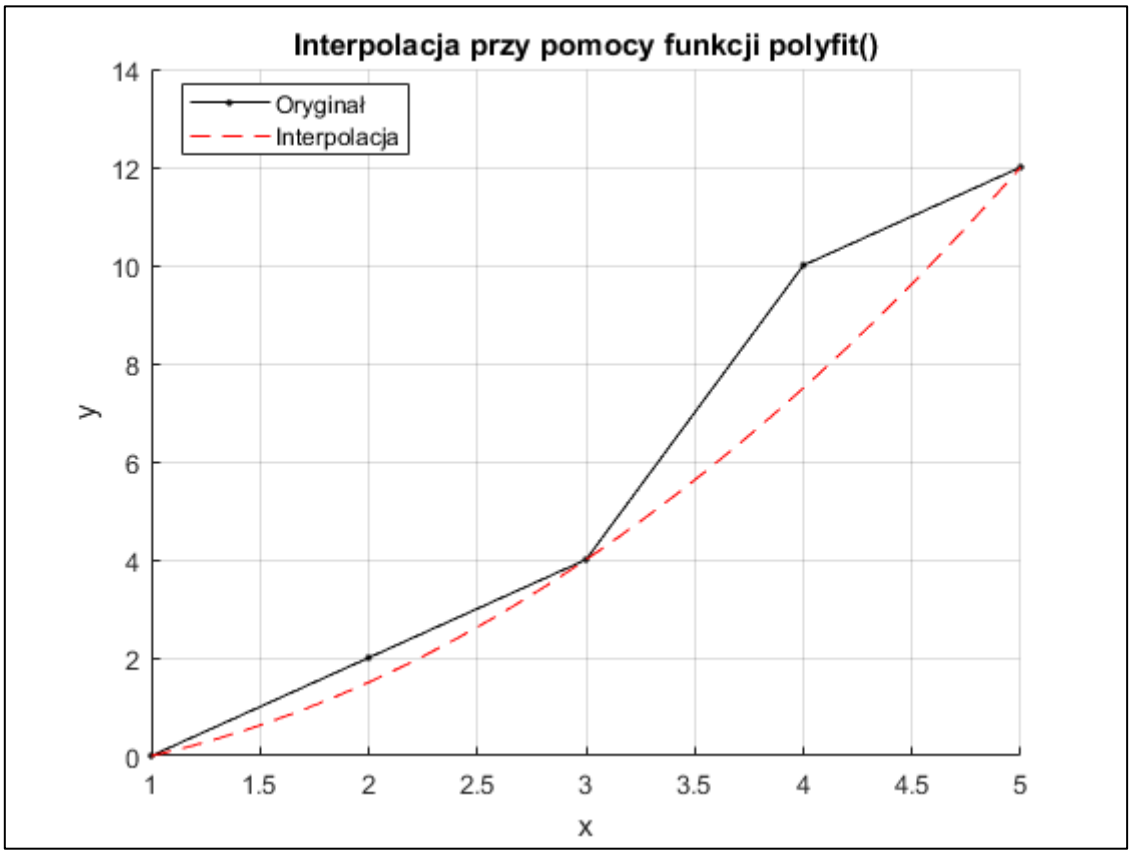
figure(1);
hold on;
grid on;
plot(u, y, '.-k');
plot(ua, ya, '--r');
title('Interpolacja na podstawie obliczeń wykonanych ręcznie');
xlabel('x');
ylabel('y');
l = legend('Oryginał', 'Interpolacja');
l.Location = 'best';

figure(2);
hold on;
grid on;
plot(u, y, '.-k');
plot(uai, yai, '--r');
title('Interpolacja przy pomocy funkcji polyfit()');
xlabel('x');
ylabel('y');
l = legend('Oryginał', 'Interpolacja');
l.Location = 'best';
```

Listing 5.1 - Skrypt porównujący interpolację wykonaną ręcznie oraz przez program



Rysunek 14 - Interpolacja na podstawie obliczeń



Rysunek 15 - Interpolacja przy pomocy funkcji polyfit()

6. Wnioski

Zbadano wpływ stopnia wielomianu aproksymującego na błąd aproksymacji funkcji wykładniczej. Z wyników widocznych na wykresie słupkowym (Rysunek 1) wynika, że możliwe jest dobranie optymalnego stopnia wielomianu do aproksymacji funkcji wykładniczych. W tym przypadku najlepszy okazał się być wielomian 5-go stopnia; aproksymacja tym wielomianem obarczona była najmniejszym błędem. Należy jednak pamiętać, że oprócz minimalizacji błędu aproksymacji, pożądane jest również podobieństwo kształtu wielomianu aproksymującego do oryginału funkcji. Jednym z praktycznych zastosowań rozważanego przypadku aproksymacji funkcji wykładniczej jest wykorzystanie otrzymanego przebiegu do wyznaczenia nastaw regulatorów PID metodą Zieglera-Nicholsa. Konieczne jest wówczas wyznaczenie dwóch punktów przegięcia krzywej będącej wynikiem eksperymentu. Niestety żaden z wielomianów (Rysunek 2 - Rysunek 7) nie odwzorowuje oryginalnych punktów przegięcia. Najbardziej prawdopodobne jest jednak, że wielomian 3-go stopnia najlepiej będzie spełniał to zadanie, jeżeli dane zostaną wstępnie przefiltrowane. Założenie to wynika z faktu, że wielomian 3-go stopnia może posiadać 2 punkty przegięcia, a zastosowanie wielomianów wyższego stopnia, o większej ilości punktów przegięcia, stanowi ryzyko powstania przegięć w niewłaściwych miejscach z powodu obecności zakłóceń.

Porównano wyniki aproksymacji różnych próbek za pomocą różnych funkcji aproksymujących. Zgodnie z oczekiwaniami, aproksymacja próbek obarczona była najmniejszym błędem wtedy, gdy funkcja aproksymująca była najlepiej dopasowana kształtem do oryginału, na podstawie którego próbka została wygenerowana. Przykładem może być funkcja wykładnicza, gdzie najmniejszy błąd zaobserwowano wtedy, gdy aproksymowano ją również funkcją wykładniczą. Zauważono też, że w stosunku do wszystkich pozostałych funkcji aproksymujących, aproksymacja wielomianem okazała się dawać znacznie lepsze wyniki dla każdej z próbek (Rysunek 13). Obserwacja ta potwierdza bardzo dobre zdolności wielomianów do aproksymacji próbek losowych i tłumaczy jednocześnie wysoką popularność zastosowania wielomianów w tej dziedzinie.

Zgodnie z poleceniem, dokonano interpolacji niewielkiego wektora danych. W przypadku dużej ilości danych o małej dokładności (np. próbek losowych), używano aproksymacji w celu dokonania regresji danych empirycznych. Innym przypadkiem jest sytuacja, kiedy posiadana jest niewielka ilość informacji (kilka punktów danych), ale znany jest pożądany kształt krzywej. Sytuacja tego rodzaju została poddana eksperymentowi, w którym wybrano 3 punkty i poddano je liniowej interpolacji wielomianem Lagrange'a (2-go rzędu). Interpolacja pozwoliła na wyznaczenie znacznie większej ilości punktów krzywej przechodzącej przez wybrane punkty danych empirycznych i narysowanie gładkiego wykresu tej krzywej. Interpolacji dokonano odręcznie wykonując obliczenia, ale również zastosowano charakterystyczną dla środowiska Octave funkcji polyfit(), która służy zarówno do aproksymacji metodą najmniejszych kwadratów, jak i interpolacji wielomianem (definiuje to rozmiar danych przyjmowanych przez funkcję). Wyniki interpolacji są identyczne dla obliczeń odręcznych i otrzymanych poprzez użycie funkcji polyfit(). Potwierdza to poprawność implementacji metody i pokazuje zasadę jej działania; punkty wybrane do interpolacji leżą dokładnie na wyznaczonej krzywej (Rysunek 14, Rysunek 15).